Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 26, núm. 2, 2011. Pàg. 185–220. DOI: 10.2436/20.2002.01.39

La desigualtat de Brunn-Minkowski

Oriol Serra

Si les desigualtats són argent
les desigualtats justes són or.

Resum: Aquest article fa una exposició de la desigualtat de Brunn-Minkowski, que relaciona la mesura de la suma de dos conjunts amb la dels seus sumands, i d'algunes de les seves variants. Aquesta desigualtat clàssica està estretament relacionada amb la desigualtat isoperimètrica i té nombroses aplicacions en algorísmia, anàlisi, combinatòria, geometria, probabilitat i teoria de nombres.

Paraules clau: desigualtat de Brunn-Minkowski, desigualtats isoperimètriques.

Classificació MSC2010: 05D, 11B, 11H, 52A, 68Q25, 90C27.

1 Introducció

En matemàtiques hi ha algunes desigualtats fonamentals que apareixen en entorns diversos i que, pel seu caràcter bàsic, acaben sent una eina recurrrent. L'exemple més cèlebre d'això és, potser, la desigualtat de Cauchy-Schwarz, que té a més la virtut de ser una desigualtat justa per a la qual el cas d'igualtat està ben determinat.

En aquest article es discuteix una altra desigualtat clàssica que, tot i ser potser menys popular, ha estat la llavor de desenvolupaments teòrics que continuen estant en plena activitat, i ha trobat nombroses aplicacions, com ara en l'algorísmia, l'anàlisi funcional, la cristal·lografia, la combinatòria, la probabilitat, la teoria de nombres i, per descomptat, la geometria. Es tracta de l'anomenada *desigualtat de Brunn-Minkowski*, que relaciona el volum de la suma de dos conjunts compactes a $\mathbb{R}^n$ amb el volum de cada sumand. Relaciona, doncs, mesura, geometria i àlgebra.

La desigualtat de Brunn-Minkowski té arrels d'allò més profundes en la història de la civilització occidental. Virgili conta a l'*Eneida* la història de la reina Dido, princesa de Tir que, fugint de la cobdícia del seu germà Pigmalió va arribar a terres de l'actual Tunísia. Allà, i com a resposta a la seva petició d'hospitalitat, li va ser concedida «tota la terra que pogués abastar amb una pell de brau». A la migrada hospitalitat dels indígenes berbers, Dido va respondre amb intel·ligència matemàtica, tallant la pell i encerclant amb les seves fines tires el perímetre circular d'una gran parcel·la de terra, el turó de Brisa (o turó de la pell de brau) on s'hi aixecaria la fortalesa de la ciutat de Cartago. Val a dir que la reina va tenir un final trist, ja que va morir per despit d'amor a causa d'Enees, a qui els deus havien designat fundador de Roma, fet que va portar a la llegendària rivalitat entre romans i cartaginesos. Dido, però, va ser divinitzada pel seu poble i va rebre el nom de Tanit. Va ser, també, honorada per la matemàtica universal pel seu teorema de Dido, segons el qual el cercle és la figura plana que tanca una àrea més gran entre les de mateix perímetre.

En la literatura es poden trobar narracions excel·lents sobre la constel·lació matemàtica al voltant de la desigualtat de Brunn-Minkowski. Richard John Gardner [24] dóna una fascinant exposició panoràmica de l'univers de desigualtats relacionades amb la de Brunn-Minkowski, amb una completa bibliografia de més de cent cinquanta referències. El text *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*, de Rolf Schneider [58], exposa els desenvolupaments de la desigualtat en el context que la va veure néixer, la geometria convexa, i Keith Ball [1] fa una deliciosa excursió per la geometria convexa que inclou la desigualtat de Brunn-Minkowski. Amb aquests i molts altres precedents, alguns dels quals es mencionaran més endavant, el desig de l'autor de compartir amb els lectors del *Butlletí* el contacte amb la desigualtat de Brunn-Minkowski quedaria més que satisfet. Sense ànim de competir amb aquestes obres mestres de la divulgació matemàtica, queda l'excusa de donar una visió lleugerament més personal, que vol posar èmfasi en versions discretes de la desigualtat o de les seves conseqüències, i que estan descrites amb menys intensitat en altres llocs.

El punt d'inici d'aquesta exposició és la desigualtat en si, la seva història i una demostració a la secció 2. Una de les aplicacions clàssiques n'és la desigualtat isoperimètrica, que es discuteix a la secció 3. D'entre les moltes extensions naturals de l'anàlisi de la desigualtat de Brunn-Minkowski discutirem només la desigualtat de Prékopa-Leindler a la secció 4. El viatge continua amb versions discretes de la desigualtat isoperimètrica en espais vectorials sobre cossos finits, i en grups abelians finits en general, a la secció 5. El parallelisme entre versions contínues i en espais finits és més clara en relació amb el problema isoperimètric, la versió discreta del qual es discuteix a la secció 6. La secció 7 tracta versions de la desigualtat de Brunn-Minkowski per a conjunts finits en l'espai euclidià. Per acabar aquest recorregut, es discuteixen alguns refinaments de la desigualtat de Brunn-Minkowski relacionats amb les desigualtats de Bonnesen. L'article es clou amb una secció que descriu algunes aplicacions de les desigualtats anteriors. Tot plegat no exhaureix les ramificacions de la desigualtat en la matemàtica actual ni, encara menys, les seves aplicacions, però dóna una perspectiva sobre una desigualtat que té un significat matemàtic intrínsec i del partit que se'n pot arribar a treure.

2 La desigualtat de Brunn-Minkowski

La desigualtat de Brunn-Minkowski té els seus orígens en l'estudi de cossos convexos en l'espai euclidià. Recordem que, en aquest context, un cos en l'espai euclidià $\mathbb{R}^n$ és un conjunt compacte amb interior no buit (és a dir, tancat, afitat i n-dimensional). Un cos $K \subset \mathbb{R}^n$ és convex si, per a cada dos punts $x, y \in K$, el segment de recta que els uneix

$$\left\{\lambda x + (1-\lambda)y \colon \lambda \in [0,1]\right\}$$

està tot ell contingut a K. Això vol dir que K no té cràters. De la mateixa manera, per a cada punt de la frontera de K hi passa un hiperplà que deixa K completament a un costat, el ben conegut teorema de separació de Hahn-Banach. Els exemples més senzills de cossos convexos són les boles,

$$B(x_0, r) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon d(x, x_0) \le r\right\},$$

on $d(\cdot,\cdot)$ denota la distància euclidiana, i el cub $[-1,1]^n$. En dimensió 1 els cossos convexos són els intervals tancats, que potser no semblen un objecte d'estudi prou atractiu, però en dimensió dos comencen a desvetllar les nombroses propietats que fan de la convexitat una noció fecunda. Brunn va observar que si es pren un cos convex a $\mathbb{R}^2$ i es comprimeix, en resulta una funció convexa cap avall en el seu suport. Recordem que una funció $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ és convexa si per a qualsevol parell de punts $x, y \in [a,b]$ se satisfà

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \text{per a tot } \lambda \in [0,1]. \tag{1}$$

Geomètricament la desigualtat indica que la gràfica de la funció està sempre per sota del segment que uneix dos punts qualssevol d'aquesta gràfica (o hi coincideix, en el cas límit on la gràfica també sigui una recta). Una funció f és convexa cap avall si $-f$ és convexa.

La compressió a què es feia referència, escollida una direcció en el pla —diguem la donada per la recta $x = 0$— consisteix a definir la funció que a cada $a \in \mathbb{R}$ li fa correspondre la llargada de la intersecció de la recta $x = a$ amb el cos convex (vegeu la figura 1). L'observació de Brunn és que la funció que en resulta és convexa en el seu suport.

Brunn es va preguntar si passa el mateix en dimensions més grans que dos. L'exemple del con, en el qual l'àrea de les seccions ortogonals a la seva altura creix com a^2, indica que la generalització a dimensions més grans no pot ser tan simple. En canvi, l'arrel de la funció que dóna l'àrea d'aquestes seccions

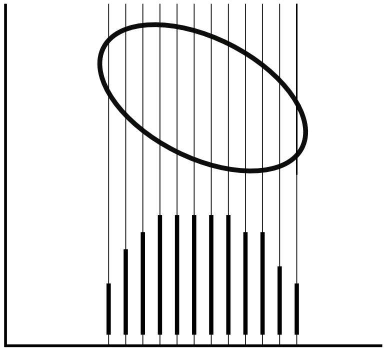

FIGURA 1: Compressió d'un cos convex en el pla.

sí que és, en forma extrema, convexa cap avall: és una recta (com passa en un triangle rectangle en el pla.) El teorema que apareix a la tesi doctoral de Brunn, de 1887, diu que aquesta és la manera correcta d'expressar el fenomen:

TEOREMA 1 (BRUNN). *Sigui K un cos convex a $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ un vector unitari i denotem per $H_t = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \langle x, v\rangle = t\}$ l'hiperplà ortogonal a v que passa per tv. La funció*

$$f(t) = \mu_{n-1}(K \cap H_t)^{1/(n-1)}$$

és convexa cap avall en el seu suport.

En aquest teorema, $\mu_n(X)$ denota la mesura de Lebesgue de $X \subset \mathbb{R}^n$ (ometrem el subíndex a μ_n quan la dimensió estigui clara pel context).

Minkowski va reformular aquest teorema i va observar que, si $K_r = K \cap H_r$ i $K_s = K \cap H_s$ són dues seccions de K amb $r < s$, aleshores la convexitat de K implica que, per a cada $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda \cdot K_r + (1 - \lambda) \cdot K_s \subset K_{\lambda r+(1-\lambda)s}. \tag{2}$$

Aquí s'ha d'entendre la suma de dos conjunts A, B com el conjunt de totes les sumes d'elements de A i de B,

$$A + B = \{a + b \colon a \in A, b \in B\},$$

que s'anomena també *suma de Minkowski*. Observem que, com que la mesura és invariant per translacions i $A + (B + b) = (A + B) + b$, la mesura de $A + B$ no varia si traslladem els sumands. D'altra banda, $\lambda \cdot A = \{\lambda a \colon a \in A\}$ és la dilació de A per λ. Tornant a (2), i combinant aquesta relació amb el teorema de Brunn, veiem que

$$\lambda\mu_{n-1}(K_r)^{1/(n-1)} + (1-\lambda)\mu_{n-1}(K_s)^{1/(n-1)} \leq \mu_{n-1}\big(\lambda K_r + (1-\lambda)K_s\big)^{1/(n-1)}. \tag{3}$$

Aquesta desigualtat aporta més llum al teorema de Brunn, especialment si oblidem que parlem de seccions d'un cos convex a $\mathbb{R}^n$, i escrivim la desigualtat com

TEOREMA 2 (DESIGUALTAT DE BRUNN-MINKOWSKI). *Siguin A, B dos cossos no buits a $\mathbb{R}^n$. Se satisfà*

$$\mu(A+B)^{1/n} \geq \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}. \tag{4}$$

A més, hi ha igualtat si, i només si, A i B són conjunts convexos i B és una imatge homotètica de A (és igual a A llevat de translacions i dilacions).

FIGURA 2: Karel Hermann Brunn (1862–1939) va néixer a Roma però va viure gairebé tota la seva vida a Munic, on va estudiar i va exercir de professor. És considerat el pare de la convexitat, noció que va desenvolupar en la seva tesi doctoral *Über Ovale und Eiflächen* (*Sobre ovals i formes d'ou*). Com que no s'ha disposat de cap imatge seva, a l'esquerra es veu l'escalinata de la Universitat Ludwig Maximilian de Munic, universitat a la qual va dedicar gran part de la seva vida. A la dreta, Hermann Minkowski (1864–1909). Nascut a Lituània, va estudiar i treballar a Königsberg, Bonn, Zuric (on va ser professor d'Einstein) i Götingen, on va morir d'apendicitis. És conegut sobretot pel seu tractament geomètric de problemes en teoria de nombres i per la seva contribució a la teoria de la relativitat.

Una manera de visualitzar la suma de Minkowski de dos cossos A, B a $\mathbb{R}^n$, és entendre-la com la unió de tots els traslladats $A+b$ per a $b \in B$. En la figura 3 s'il·lustren dos exemples amb A i B, dos cubs centrats a l'origen a $\mathbb{R}^2$, diguem $A = [-l, l] \times [-l, l]$ i $B = [-h, h] \times [-h, h]$, i C un disc centrat a l'origen de radi $r < l/2$. La suma $A+B$ és el cub $[-l-h, l+h] \times [-l-h, l+h]$ d'àrea $(2(l+h))^2$, amb arrel

$$\big(\mu(A+B)\big)^{1/2} = 2l + 2h = \mu(A)^{1/2} + \mu(B)^{1/2},$$

que dóna el cas d'igualtat. La suma $A+C$ té àrea

$$\mu(A+C) = l^2 + 4lr + \pi r^2 > l^2 + 2\sqrt{\pi}lr + \pi r^2 = \mu(A) + 2\sqrt{\mu(A)\mu(C)} + \mu(C),$$

o sigui que

$$\big(\mu(A+C)\big)^{1/2} > \mu(A)^{1/2} + \mu(C)^{1/2}.$$

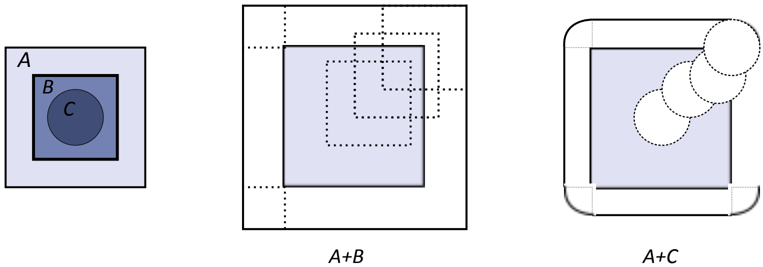

FIGURA 3: Suma de Minkowski.

A la formulació de la desigualtat (4) hi ha diversos aspectes afegits respecte del teorema de Brunn. Els cossos A i B ja no s'entenen com a seccions d'un cos convex, i fins i tot el resultat s'estén a conjunts no necessàriament convexos. De fet, la desigualtat continua sent vàlida si se substitueix la condició de compactes per la de conjunts mesurables, encara que aleshores cal afegir la hipòtesi que $A+B$ sigui també mesurable. A més, en la desigualtat (4) no hi ha referència explícita a combinacions convexes de conjunts. Finalment, i aquest és un aspecte important, es caracteritza el cas d'igualtat.

Hi ha moltes demostracions de la desigualtat de Brunn-Minkowski. En realitat, Brunn [9, 10] la va formular i provar per al cas $n = 3$, i Minkowski [48] va donar-ne una altra per a dimensió arbitrària. Les dues demostracions identificaven el cas d'igualtat i van ser formulades per a cossos convexos. Per citar només les més clàssiques, Blashke [4] i Kneser i Süss [37] en van proposar dues més i Lusternik [43] va estendre més tard la desigualtat a cossos no necessàriament convexos. Aquí reproduïm la demostració de Hadwiger i Ohmann [29] que, en paraules de Gardner [24], «és tan senzilla i tan bonica que una audiència matemàtica no pot deixar de sentir-se captivada pel seu encant». Deixant de banda alguns detalls tècnics, la prova segueix aquí un altre text excel·lent, *Lectures on discrete geometry* de Jiří Matoušek [45].

Provem primer la desigualtat (4) per a una classe simple de conjunts, els que es poden posar com a unió de cubs de la forma $[x_1, y_1] \times \cdots \times [x_n, y_n] \subset \mathbb{R}^n$ i que tenen interiors disjunts, com un conjunt fet de maons. Si A i B són dos conjunts d'un maó cadascun, és a dir, dos cubs de costats $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ respectivament, aleshores $A+B$ és també un cub (com en l'exemple de la figura 3) de costats $a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n$ i la desigualtat de Brunn-Minkowski es redueix a

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\right)^{1/n} \geq \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)^{1/n}. \tag{5}$$

Aquesta desigualtat, coneguda també com a *desigualtat de Minkowski*, és una de les moltes que es poden obtenir de la desigualtat aritmeticogeomètrica, una altra de les desigualtats clàssiques: per a $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$,

$$(c_1 \cdots c_n)^{1/n} \leq \frac{c_1 + \cdots + c_n}{n}. \tag{6}$$

Dividint el segon terme de (5) pel primer i aplicant la desigualtat aritmeticogeomètrica (6), veiem

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)}{\left(\prod_{i=1}^n (a_i + b_i)\right)^{1/n}} &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i + b_i}\right)^{1/n} \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + b_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i + b_i} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

que prova la desigualtat de Minkowski. Posats a fer, recordem que una de les demostracions més naturals de la desigualtat aritmeticogeomètrica fa servir la convexitat de la funció exponencial, que és també el morfisme entre el grup additiu dels nombres reals amb el grup multiplicatiu dels nombres reals positius. La coneguda desigualtat de Jensen diu que les funcions convexes a l'interval $[a, b]$ satisfan la desigualtat anàloga a (1), que les defineix, per a qualsevol combinació convexa de n punts, és a dir, per a qualsevol punt $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, qualsevol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ amb $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, i una funció f convexa a $[a, b]$, tenim

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Fent servir aquesta desigualtat amb la funció exponencial $f(x) = \exp(x)$, obtenim

$$\exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i\right) \leq \frac{1}{n} \exp(u_i),$$

que es tradueix en (6) posant $c_i = e^{u_i}$. Així, la desigualtat de Brunn-Minkowski es relaciona amb una variant de la desigualtat de Cauchy-Schwarz, que es pot fer derivar de la desigualtat $x^2 \geq 0$, i tot queda reduït a una observació trivial però fonamental. Aquest és un bon punt per recordar un altre text altament recomanable, *The Cauchy-Schwarz Master Class: An introduction to the art of mathematical inequalities*, del probabilista Michael Steele [62], que fa un recorregut per les desigualtats més significatives de les matemàtiques i deixa de banda només la de Brunn-Minkowski que tractem aquí, això sí, justificant-se per aquesta omissió.

A més, en totes aquestes desigualtats el cas d'igualtat està ben definit. En la desigualtat aritmeticogeomètrica (6), la igualtat es dóna si i només si

$c_1 = \cdots = c_n$, i en la nostra versió primitiva de la desigualtat de Brunn-Minkowski (5), per tant, si i només si

$$\frac{a_1}{a_1+b_1} = \cdots = \frac{a_n}{a_n+b_n} \quad \text{i} \quad \frac{b_1}{a_1+b_1} = \cdots = \frac{b_n}{a_n+b_n},$$

que implica $a_i/a_j = b_i/b_j$ per a cada parell $i, j \in \{1, \dots, n\}$, o sigui que A i B són cubs homotètics.

Ara és el moment de tornar a la nostra demostració de la desigualtat de Brunn-Minkowski, que fins ara hem provat per a dos cubs. La demostració per a conjunts fets de maons se segueix per inducció sobre el nombre total k de maons entre els de A i els de B (i aquí hi ha l'encant de la senzillesa de la demostració). Completat el cas $k = 2$, el pas d'inducció es pot veure així. Com que $k > 2$, un dels dos conjunts, per exemple A, té almenys dos maons. Prenem un hiperplà H paral·lel a un dels hiperplans coordenats que separi almenys un maó sencer de A en un costat i almenys un maó complet a l'altre (és fàcil veure que hi ha d'haver algun H amb aquesta propietat). Podem suposar que H és l'hiperplà $x_1 = 0$. Així H divideix A en dos conjunts de maons A^+, A^-, cada un dels quals amb almenys un maó menys que A. Ara traslladem B en la direcció ortogonal a H (recordem que la mesura de la suma de Minkowski és invariant per translacions dels sumands) de manera que quedi dividit per H en dues parts B^+, B^- complint

$$\frac{\mu(A^+)}{\mu(A^-)} = \frac{\mu(B^+)}{\mu(B^-)}.$$

Diem $\rho = \mu(A^+)/\mu(A^-)$ a aquesta relació. La figura 4 il·lustra el que estem fent.

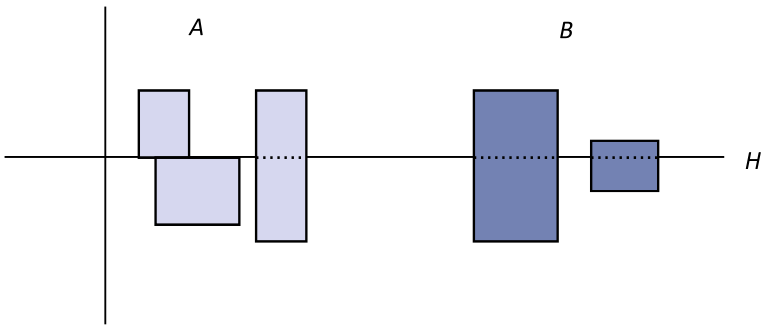

FIGURA 4: Tallant maons.

Cada part B^+ i B^- és un conjunt que té com a màxim tants maons com tenia B, de manera que A^+ i B^+ tenen en total com a molt $k-1$ maons i el mateix es pot dir de A^- i B^-. Observem que $A^+ + B^+$ i $A^- + B^-$ es tallen en un conjunt contingut en H, per tant, de mesura zero. Fent servir la hipòtesi d'inducció,

$$\begin{aligned}\mu(A+B) &\geq \mu(A^+ + B^+) + \mu(A^- + B^-)\\ &\geq \left(\mu(A^+)^{1/n} + \mu(B^+)^{1/n}\right)^n + \left(\mu(A^-)^{1/n} + \mu(B^-)^{1/n}\right)^n\\ &= \left(\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{1/n}\mu(A)^{1/n} + \left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^{1/n}\mu(B)^{1/n}\right)^n +\\ &\quad + \left(\left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{1/n}\mu(A)^{1/n} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^{1/n}\mu(B)^{1/n}\right)^n\\ &= \left(\mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n}\right)^n,\end{aligned}$$

que és el que es tractava de provar.

Un cop provada la desigualtat per a conjunts de maons, un argument estàndard en teoria de la mesura permet estendre-la a conjunts compactes. Si tenim una successió decreixent $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ de conjunts mesurables de $\mathbb{R}^n$ aleshores la successió $\mu(K_1), \mu(K_2)\ldots$ té límit

$$\lim_{i\to\infty} \mu(K_i) = \mu(\cap_i K_i). \tag{7}$$

Un altre fet bàsic de la teoria de la mesura és que qualsevol conjunt compacte es pot expressar com la intersecció d'una successió decreixent de conjunts de maons. Si $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ i $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ són dues successions de conjunts de maons amb intersecció els conjunts compactes A i B respectivament, aleshores $\mu(A) = \mu(\cap_i A_i)$ i $\mu(B) = \mu(\cap_i B_i)$, de manera que es pot estendre la desigualtat de Brunn-Minkowski, que val per a conjunts de maons, a conjunts compactes fent servir (7), ja que la suma de Minkowski $A+B$ conté la intersecció de la successió $A_1 + B_1 \supset A_2 + B_2 \supset \cdots$. Per tant,

$$\begin{aligned}\mu(A+B)^{1/n} &\geq \lim_{i\to\infty} \mu(A_i + B_i)^{1/n}\\ &\geq \lim_{i\to\infty} \mu(A_i)^{1/n} + \lim_{i\to\infty} \mu(B_i)^{1/n}\\ &= \mu(A)^{1/n} + \mu(B)^{1/n},\end{aligned}$$

en què, en el segon pas, hem fet servir la desigualtat de Brunn-Minkowski per a conjunts de maons. Això completa la demostració i aquesta presentació de la desigualtat.

3 La desigualtat isoperimètrica

La desigualtat isoperimètrica és una desigualtat fonamental que estén el teorema de Dido, exposat en la introducció, a dimensions arbitràries (i posteriorment a contextos més generals que els espais euclidians). De fet, el teorema de Dido no va veure una demostració completa fins al segle XIX, coincidint més o menys en el temps amb l'aparició de la desigualtat de Brunn-Minkowski. Tractant-se de resultats de naturalesa propera, no és estrany que estiguin relacionats i, de fet, una de les primeres aplicacions importants de la desigualtat de Brunn-Minkowski va ser provar la desigualtat isoperimètrica.

La desigualtat isoperimètrica relaciona la mesura d'un cos convex a $\mathbb{R}^n$ amb la mesura $(n-1)$-dimensional de la superfície que el tanca. Aquí sembla millor referir-se a $\mu(A)$ com el volum de A, i aleshores Minkowski en defineix l'àrea com

$$s(A) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mu(A + \epsilon B_1) - \mu(A)}{\epsilon}, \tag{8}$$

on B_1 és una bola de radi 1 centrada a l'origen. Un cop d'ull a l'exemple de la figura 3 contribueix a convèncer de la naturalitat de la definició i, en particular, que per al cas que A sigui un cub de costat l, es veu com la definició (8) ens dóna efectivament el seu perímetre $4l$. La definició es pot estendre a un parell qualsevol A, B de cossos convexos de la manera següent:

$$\mu_1(A, B) = \frac{1}{n} \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{\mu(A + \epsilon B) - \mu(A)}{\epsilon}. \tag{9}$$

Escrita així, amb el factor $1/n$, l'expressió anterior s'anomena *volum mixt de Minkowski*. L'origen d'aquest nom està en un teorema de Minkowski que assegura que, per a cada $\epsilon > 0$, $\mu(A + \epsilon B)$ es pot escriure com el polinomi següent de grau dos en ϵ,

$$\mu(A + \epsilon B) = \mu(B)\epsilon^2 + \mu_1(B, A)\epsilon + \mu(A).$$

El volum mixt de Minkowski $\mu_1(B, A)$ és el coeficient de ϵ en aquest polinomi. De fet, el teorema de Minkowski que esmentem diu, més en general, que $\mu(t_1 B_1 + \cdots + t_m B_m)$ és un polinomi en les variables $t_1, \ldots, t_m$ de grau la dimensió de l'espai ambient dels cossos $B_1, \ldots, B_m$, i el volum mixt de Minkowski $\mu_j(B_{i_1}, \ldots, B_{i_j})$ es defineix en general com el coeficient de $t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_j}$ en aquest polinomi. En particular, aquest teorema justifica que el límit a (9) existeix i el terme de l'esquerra està ben definit. Prenent $B = B_1$, la bola de radi 1 centrada a l'origen, obtenim l'àrea de A com

$$s(A) = n\mu_1(A, B_1).$$

La desigualtat isoperimètrica a $\mathbb{R}^n$ estableix que, per a qualsevol cos convex A,

$$\left(\frac{\mu(A)}{\mu(B_1)}\right)^{1/n} \leq \left(\frac{s(A)}{s(B_1)}\right)^{1/(n-1)}, \tag{10}$$

i val la igualtat si i només si A és homotètic a B_1. En la seva formulació habitual, la desigualtat diu que entre tots els cossos convexos que tenen la mateixa àrea, la bola és el cos que té el volum més gran.

Coneguda des de temps antics, almenys per a dimensions dos i tres, la desigualtat isoperimètrica (10) no va tenir una demostració fins a final del segle XIX. Sembla que trobar-ne una demostració va ser una de les motivacions de Brunn, i efectivament, la desigualtat de Brunn-Minkowski proporciona una demostració immediata de la desigualtat isoperimètrica. En realitat, es pot dir que aquesta darrera n'és un cas particular.

Per veure-ho farem servir una reformulació de la desigualtat (4), i de passada podrem apreciar la seva versatilitat. En la literatura la desigualtat de Brunn-Minkowski es presenta sovint de la manera següent. Donats dos cossos compactes A, B a $\mathbb{R}^n$, per a qualsevol $s, t \in \mathbb{R}^+$ tenim

$$\mu(sA + tB)^{1/n} \geq s\mu(A)^{1/n} + t\mu(B)^{1/n}. \tag{11}$$

Aquí l'observació pertinent és que la mesura de Lebesgue a $\mathbb{R}^n$ és una funció homogènia de grau n, és a dir, $\mu(sA) = s^n\mu(A)$ per a $s \geq 0$, de manera que la desigualtat anterior és equivalent a (4).

Observem que, de (11), es dedueix immediatament el teorema de Brunn sobre la convexitat cap avall de la funció $f(r) = \mu_{n-1}(A \cap H_r)^{1/(n-1)}$ en el seu suport (si A és un cos convex), ja que, per a qualsevol $\lambda \in [0, 1]$ i qualsevol $r < s$ tal que $A_r = (A \cap H_r)$ i $A_s = (A \cap H_s)$ són no buits, el conjunt $\lambda A_r + (1 - \lambda)A_s$ està contingut, per ser A convex, en la secció $A_{\lambda r+(1-\lambda)s}$ de A. Per tant,

$$\begin{aligned} f(\lambda r + (1 - \lambda)s) &= \mu_{n-1}\big(A_{\lambda r+(1-\lambda)s}\big)^{1/(n-1)} \\ &\geq \mu_{n-1}\big(\lambda A_r + (1 - \lambda)A_s\big)^{1/(n-1)} \\ &\geq \lambda\mu_{n-1}(A_r)^{1/(n-1)} + (1 - \lambda)\mu_{n-1}(A_s)^{1/(n-1)} \\ &= \lambda f(r) + (1 - \lambda)f(s). \end{aligned}$$

Tornant ara a la desigualtat isoperimètrica, la seva deducció se segueix de la formulació (11) en quatre ratlles:

$$\begin{aligned} s(A) &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mu(A + \epsilon B_1) - \mu(A)}{\epsilon} \\ &\geq \lim_{\epsilon\to 0} \frac{(\mu(A)^{1/n} + \epsilon\mu(B_1)^{1/n})^n - \mu(A)}{\epsilon} \\ &= n\mu(A)^{(n-1)/n}\mu(B_1)^{1/n}. \end{aligned}$$

De la definició d'àrea a (8) i l'homogeneïtat de μ, obtenim

$$s(B_1) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{(1 + \epsilon)^n}{\epsilon}\mu(B_1) = n\mu(B_1),$$

que, inserit a la desigualtat anterior, dóna (10) i la caracterització del cas d'igualtat.

4 La desigualtat de Prékopa-Leindler

L'expressió (11) permet obtenir una versió de la desigualtat de Brunn-Minkowski en la qual no hi apareix la dimensió. Per la desigualtat aritmeticogeomètrica amb pesos (que es dedueix de la convexitat de la funció exponencial de la mateixa manera que hem exposat abans), tenim

$$(1-\lambda)\mu(A)^{1/n} + \lambda\mu(B)^{1/n} \geq \mu(A)^{\lambda/n}\mu(B)^{(1-\lambda)/n}.$$

Inserint aquesta desigualtat en la de Brunn-Minkowski, obtenim

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^{\lambda}\mu(B)^{1-\lambda}. \tag{12}$$

La desigualtat de Prékopa-Leindler tradueix la desigualtat anterior de la geometria a l'anàlisi. Per fer-ho només cal pensar que la mesura d'un conjunt és la integral de la seva funció característica respecte de la mesura. Si $h = 1_{\lambda A+(1-\lambda)B}$, $f = 1_A$ i $g = 1_B$, on 1_X és la funció característica d'un conjunt mesurable $X \subset \mathbb{R}^n$, aleshores (12) es pot escriure com

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,\mathrm{d}\mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\lambda}.$$

Arribats en aquest punt només hi ha un pas per preguntar-se si es pot formular una desigualtat anàloga vàlida per a funcions més generals que les funcions característiques. Una generalització en aquesta direcció és el teorema següent:

Teorema 3 (Desigualtat de Prékopa–Leindler). *Siguin h, f i g funcions integrables a $\mathbb{R}^n$ a valors reals i no negatives. Si per a $0 < \lambda < 1$ se satisfà*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda} \tag{13}$$

per a qualsevol $x, y \in \mathbb{R}^n$, aleshores

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\,\mathrm{d}\mu \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\lambda}. \tag{14}$$

Certament, les funcions indicadores h, f i g de $\lambda A + (1-\lambda)B$, A i B respectivament, satisfan la condició del teorema, ja que la part de l'esquerra de la desigualtat (13) val 1 si i només si $x \in A$ i $y \in B$, i en aquest cas $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda A + (1-\lambda)B$, que és condició necessària i suficient perquè $h(\lambda x + (1-\lambda)y)$ valgui 1. Altrament, la part dreta de (13) val zero i la desigualtat se satisfà trivialment. Per tant, el teorema 3 és certament una generalització de la versió (12) de la desigualtat de Brunn-Minkowski.

Pot semblar curiós recordar aquí la desigualtat de Hölder que, seguint amb la mateixa notació, diu

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{\lambda} g^{1-\lambda}\,\mathrm{d}\mu \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\mu\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}\mu\right)^{1-\lambda},$$

sempre que les integrals involucrades estiguin ben definides. El que sorpren és que la desigualtat de Hölder va en sentit contrari a la de Prékopa-Leindler. Hi ha d'haver, doncs, un element addicional a aquesta darrera, precisament la condició (13) per la qual h ha d'estar minorada pel valor mitjà geomètric de f i g (amb pes λ).

A més de ser una generalització natural i important de la desigualtat de Brunn-Minkowski, la desigualtat de Prékopa-Leindler és una eina molt útil per a les aplicacions, alguna de les quals es menciona a la secció 9. Acabem aquesta secció donant una prova elemental de la desigualtat en dimensió $n = 1$, com s'exposa a Gardner [24, secció 7]. La idea central de la demostració consisteix a parametritzar les integrals pel volum. En el cas de dimensió 1, si

$$a = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x, \ \text{ i } \ b = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

aleshores es defineixen $\alpha, \beta\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ com els valors més petits pels quals

$$\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\alpha(t)} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\beta(t)} g(x)\,\mathrm{d}x = t. \tag{15}$$

Les funcions α i β són estrictament creixents i, per tant, són diferenciables gairebé per tot. Derivant a les igualtats (15) obtenim

$$\frac{1}{a} f\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t) = \frac{1}{b} g\big(\beta(t)\big)\beta'(t) = 1. \tag{16}$$

D'altra banda, definim

$$\gamma(t) = \lambda\alpha(t) + (1-\lambda)\beta(t),$$

i fem servir la desigualtat aritmeticogeomètrica per afitar inferiorment la seva derivada,

$$\gamma'(t) = \lambda\alpha'(t) + \big(1 - \lambda\beta'(t)\big) \geq \alpha'(t)^{\lambda}\beta'(t)^{1-\lambda}. \tag{17}$$

Finalment, fent el canvi de variables $x = \gamma(t)$ a la integral de h, i fent servir la desigualtat (17) per a γ', la identitat (16) per α' i β', i la hipòtesi (13) del teorema sobre h, tenim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x &\geq \int_0^1 h\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,\mathrm{d}t \\
\text{(de (13) i (17))} \quad &\geq \int_0^1 f\big(\alpha(t)\big)^{\lambda} g\big(\beta(t)\big)^{1-\lambda}\alpha'(t)^{\lambda}\beta'(t)^{1-\lambda}\,\mathrm{d}t \\
\text{(de (16))} \quad &= \int_0^1 f\big(\alpha(t)\big)^{\lambda} g\big(\beta(t)\big)^{1-\lambda}\left(\frac{a}{f\big(\alpha(t)\big)}\right)^{\lambda}\left(\frac{b}{g\big(\beta(t)\big)}\right)^{1-\lambda}\mathrm{d}t \\
&= a^{\lambda}b^{1-\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda},
\end{aligned}$$

que completa la demostració de la desigualtat.

5 Una versió discreta de la desigualtat de Brunn-Minkowski

Tenir en compte una idea matemàtica des de les perspectives contínua, d'una banda, i discreta, de l'altra, dóna sovint una comprensió més completa de la naturalesa d'aquesta idea. Hi ha dos aspectes de la discretització de la idea matemàtica que hi ha darrere de la desigualtat de Brunn-Minkowski. Podem considerar conjunts finits, en lloc de conjunts compactes n-dimensionals, a $\mathbb{R}^n$, i podem considerar també espais ambient discrets, en especial espais vectorials sobre cossos finits.

En qualsevol cas, la mesura d'un conjunt finit és ara simplement el seu cardinal, i la qüestió que ens plantegem és donar una cota inferior per al cardinal de la suma $A + B$ de dos conjunts A i B en termes dels cardinals dels dos conjunts sumands. Com diu Imre Ruzsa [56, cap. 5], «Essent la mesura un concepte més sofisticat que el cardinal de conjunts finits, els resultats solen ser més simples i les proves, sovint, més fàcils en el cas continu que en el discret».

Analitzem primer la qüestió en el cas que l'espai ambient sigui un espai vectorial n-dimensional sobre un cos finit. Denotem per $\mathbb{F}_q$ el cos finit de q elements, on q és una potència d'un nombre primer (els cossos de Galois, que són únics per a cada ordre i existeixen només per a ordres que són potències de nombres primers). L'estructura geomètrica (o topològica) dels espais vectorials sobre cossos finits té analogies i diferències significatives en relació amb la dels espais euclidians, i no és previsible que els resultats es tradueixin d'una situació a l'altra directament.

El cas més simple és el de $\mathbb{F}_p$, on p és ara un nombre primer, pel qual un anàleg a la desigualtat de Brunn-Minkowski (que per al cas unidimensional és força òbvia) és el següent teorema de Cauchy [12], redescobert per Davenport [13] el 1935.

Teorema 4 (Cauchy-Davenport). *Donats dos conjunts $A, B \subset \mathbb{F}_p$ se satisfà*

$$|A + B| \geq \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

A més, si $|A|, |B| > 1$ i $|A| + |B| - 1 < p - 1$, se satisfà la igualtat si i només si A i B són progressions aritmètiques amb la mateixa diferència.

Aquesta versió discreta és completament paral·lela a la desigualtat de Brunn-Minkowski. Hi intervenen, però, alguns elements que ens recorden la naturalesa discreta i finita de l'entorn. D'una banda, l'aparició de -1 en la desigualtat (que no apareix en la desigualtat de Brunn-Minkowski unidimensional) i la consideració dels efectes de vora: $A + B$ no pot ser mai més gran que tot el cos $\mathbb{F}_p$.

D'altra banda, el cas d'igualtat també està caracteritzat, i es dóna també en el cas que tots dos conjunts tenen estructura (podríem interpretar que són conjunts convexos en el sentit que són equivalents a intervals) i aquesta estructura ha de ser compartida pels dos conjunts: són progressions aritmètiques de la mateixa diferència. Observem també que, si $\min\{|A|, |B|\} = 1$, la igualtat se satisfà trivialment sense que hi hagi cap estructura aritmètica especial. En el

FIGURA 5: Harold Davenport (1907–1969) fou seguidor de la tradició de Hardy i Littlewood en la teoria de nombres a Anglaterra, i president de la Societat Matemàtica de Londres entre 1957 i 1959. Va descobrir la desigualtat que porta el seu nom i es va adonar després que ja havia estat descoberta per Cauchy. La desigualtat de Cauchy-Davenport és el punt de partida d'una àrea rica i diversa que ha atret l'atenció de matemàtics de primera fila fins als nostres dies, i que ha estat batejada per Terry Tao i Van Vu, en la seva monografia recent [64], amb el nom de *combinatòria additiva*.

cas que $|A+B| = |A|+|B|-1 = p$ o bé $|A+B| = |A|+|B|-1 = p-1$, apareixen altres casos d'igualtat en què A i B tampoc no tenen estructura aritmètica.

Hi ha diverses demostracions del teorema de Cauchy-Davenport que, a diferència de l'enunciat anàleg per als enters (que el lector pot provar sense cap dificultat), no és trivial. Hamidoune [30], un matemàtic originari de Mauritània recentment desaparegut, va concebre una manera d'analitzar el problema que està connectada amb el problema isoperimètric clàssic. Aquesta aproximació és vàlida per a qualsevol grup abelià G i per a molts problemes en combinatòria additiva. Fixat un conjunt $B \subset G$, considerem la funció que a cada conjunt $X \subset G$ li fa correspondre

$$\partial_B X = (X + B) \setminus X.$$

Aquesta definició es pot interpretar com la versió discreta de la definició de Minkowski per a l'àrea d'un cos convex (8), i en aquest context anomenem $\partial_B X$ la vora de X respecte de B, de manera que $|\partial_B X|$ es correspon amb l'àrea de X (relativa a B).

L'aspecte geomètric de la definició s'entén millor en el context dels grafs de Cayley. Donat un grup abelià G i un subconjunt $B \subset G$, el graf de Cayley $\mathrm{Cay}(G,B)$ té per vèrtexs els elements del grup i $\{x,y\}$ és una aresta del graf si i només si $x-y \in B \cup -B$. Dit d'una altra manera, un vèrtex x és adjacent a tots els vèrtexs de la forma $x+b,\ b \in B \cup -B$. A aquests grafs (als grafs en general) es pot definir una distància $d(x,y)$ com la llargada del camí més curt que uneix x amb y al graf, on la llargada d'un camí és el nombre d'arestes que travessa. No és difícil comprovar que això és efectivament una distància que dóna una estructura d'espai mètric als grafs. Per al cas dels grafs de Cayley $\mathrm{Cay}(G,B)$, en els quals el mateix grup G actua com a grup de simetries transitiu per translació, es pot definir també una norma com $|x| = d(x, 0)$. Amb aquesta terminologia, la vora d'un conjunt A és el conjunt de vèrtexs a distància exactament 1 d'algun vèrtex de A. A més, d'acord amb la definició,

$$|A + B| = |A| + |\partial_B A|.$$

Una propietat bàsica que satisfà l'operador vora $\partial(\cdot)$ és la submodularitat: per a dos conjunts qualssevol $X, Y \subset G$,

$$|\partial_B(X \cup Y)| + |\partial_B(X \cap Y)| \leq |\partial_B X| + |\partial_B Y|.$$

Aquesta desigualtat és fàcil de comprovar i s'il·lustra en la figura 6.

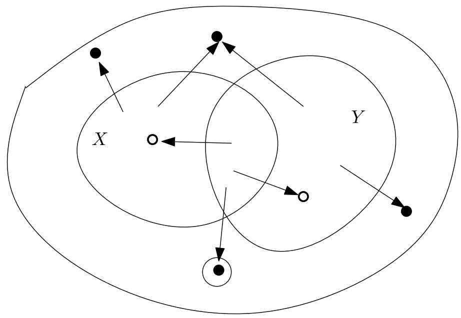

FIGURA 6: Il·lustració de la submodularitat: les fletxes indiquen suma amb algun element de B. Els punts buits estan a $\partial(X \cap Y)$ i a ∂X o ∂Y. Els punts plens estan a $\partial(X \cup Y)$ i a ∂X o ∂Y (o a tots dos), i els punts plens i arrodonits estan a tots quatre conjunts de la desigualtat.

Per provar la desigualtat de Cauchy-Davenport, suposem sense pèrdua de generalitat que $0 \in A \cap B$ (recordem que el cardinal de $A + B$ és invariant per translació) i fixem un dels dos conjunts, diguem B. No és difícil veure que, si $|A| + |B| > p$, aleshores $A + B = \mathbb{F}_p$. Podem suposar, doncs, que $|A| + |B| - 1 < p$ (altrament ja hem acabat), cosa que indica que $|\partial_B(A)| = |A + B| - |A| < |B| - 1$. Ara diem que

$$\kappa(B) = \min\{|\partial_B X| \colon X \subset \mathbb{F}_p, X \neq \emptyset, X + B \neq \mathbb{F}_p\},$$

de manera que $\kappa(B) \leq |\partial_B(A)| < |B| - 1$. Considerem la família $\mathcal{U}$ dels conjunts $U \subset \mathbb{F}_p$ de cardinal més petit que tenen aquesta vora mínima $\kappa(B)$:

$$|\partial_B U| = \kappa(B), \ \forall U \in \mathcal{U}.$$

Observem que, per definició, $\mathcal{U}$ és no buit i que, si $U \in \mathcal{U}$, aleshores tots els traslladats $U + x$ també pertanyen a $\mathcal{U}$. D'altra banda, per la submodularitat de l'operador vora, si $U, U' \in \mathcal{U}$ aleshores

$$|\partial_B(U \cap U')| \leq |\partial U| + |\partial U'| - |\partial(U \cup U')| = 2\kappa(B) - |\partial(U \cup U')| \leq \kappa(B). \quad (18)$$

Per a la darrera desigualtat a (18) s'ha de comprovar que $U \cup U' \neq \mathbb{F}_p$ (comprovació que s'ha omès) i que, per tant, $|\partial_B(U \cup U')| \geq \kappa(B)$. Per la minimalitat de $|U| = |U'|$, la desigualtat (18) només es pot complir si,

$$\text{o bé } \ U = U', \quad \text{o bé } \ U \cap U' = \emptyset.$$

Prenent ara $U' = U + x$ amb $x \neq 0$, no pot passar que $U = U + x$, ja que aleshores tindríem $U = U + x = U + 2x = \cdots$, fet que ens condueix a $U = \mathbb{F}_p$, cosa que contradiu la definició de $\mathcal{U}$. Per tant, ha de ser $(x + U) \cap U = \emptyset$ per a cada x. Això només pot passar si $|U| = 1$: si U conté dos elements diferents $u, u' \in U$ aleshores $u \in U + (u - u') \cap U$. Ara, si $|U| = 1$, aleshores trivialment $\kappa(B) = |U + B| - |U| = |B| - 1$, amb la qual cosa contradiem la hipòtesi que $\kappa(B) < |B| - 1$. Això completa la demostració de la desigualtat.

La caracterització del cas d'igualtat es pot fer amb un argument basat en la mateixa tècnica, però és més complex. En realitat, el cas d'igualtat no va ser demostrat fins al 1955, per Vosper [65].

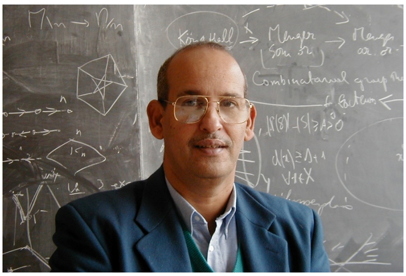

FIGURA 7: Yahya Ould Hamidoune (1947–2011) va néixer a Mauritània i va obtenir el doctorat a la Universitat París 6, on va treballar com a membre del CNRS fins a la seva mort, aquest mateix any. Va ser un dels actors destacats en l'emergència de la combinatòria additiva, per a la qual va desenvolupar l'anomenat *mètode isoperimètric* que es descriu en el text. Visitava Barcelona sovint i mantenia una intensa col·laboració amb matemàtics catalans.

Si canviem $\mathbb{F}_p$ per $\mathbb{F}_q$ amb $q = p^n$, $n \geq 1$, apareixen de sobte noves dificultats que fan difícil obtenir versions generals completament satisfactòries de la desigualtat de Brunn-Minkowski. El motiu més aparent és que si A és un subespai i B és una unió de traslladats d'aquest subespai, tenim $A + B = B$ i l'única desigualtat general que podem escriure és

$$|A + B| \geq \max\{|A|, |B|\},$$

que no és gaire útil. Martin Kneser [38] va obtenir una desigualtat general que captura aquest fenomen tot estenent la desigualtat de Cauchy-Davenport. La desigualtat de Kneser, vàlida de fet a qualsevol grup abelià, diu que si

$|A+B| < |A| + |B| - 1$, aleshores $A + B$ ha de ser la unió de traslladats d'algun subgrup H i, a més, $|A + B| \geq |A + H| + |B + H| - |H|$.

TEOREMA 5 (KNESER). *Sigui G un grup abelià i $A, B \subset G$. Si $|A+B| < |A|+|B|-1$, aleshores hi ha un subgrup $H < G$ tal que $A + B + H = A + B$ i*

$$|A + B| \geq |A + H| + |B + H| - |H|.$$

Com que els únics subgrups del grup additiu de $\mathbb{F}_p$ són trivials, la desigualtat de Kneser estén la de Cauchy-Davenport. A més, en les condicions del teorema, posant $A' = A + H$ i $B' = B + H$ es veu que la desigualtat és justa. Fent servir el teorema de Kneser, Eliahou, Kervaire i Plagne [16] van obtenir una desigualtat (que també es pot formular per a qualsevol grup abelià finit) que és justa per a qualsevol parell de cardinals $a = |A|$ i $b = |B|$.

TEOREMA 6 (ELIAHOU, KERVAIRE, PLAGNE). *Sigui G un grup abelià finit d'ordre n, i $A, B \subset G$, aleshores,*

$$|A + B| \geq \min_{d|n} \left(\left\lceil \frac{|A|}{d} \right\rceil + \left\lceil \frac{|B|}{d} \right\rceil - 1 \right) d.$$

A més, per a cada $a, b \leq n$ hi ha dos conjunts A i B de cardinals a i b pels quals val la igualtat.

Això completa la versió discreta de la desigualtat de Brunn-Minkowski en espais vectorials sobre cossos finits (o sobre grups finits), llevat que no hi ha una caracterització completa del cas d'igualtat. Pel que fa a la desigualtat isoperimètrica, però, l'analogia amb el cas continu es pot portar més lluny.

6 La desigualtat isoperimètrica en espais discrets

Un exemple especialment important d'espai vectorial finit és el que es construeix sobre el cos de dos elements $\mathbb{F}_2$. Un dels motius és que els elements de $\mathbb{F}_2^n$ es poden interpretar com a vectors característics de subconjunts de $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. En la correspondència biunívoca entre subconjunts de $[n]$ i vectors de $\mathbb{F}_2^n$, que associa a cada subconjunt $X \subset [n]$ el vector $x = (x_1, \dots, x_n)$, on $x_i = 1$ si $i \in X$ i $x_i = 0$ altrament, la diferència simètrica de conjunts es correspon amb la suma dels seus vectors característics. Una part substancial de les preguntes que es formulen sobre famílies de conjunts d'un conjunt finit es poden expressar de manera eficient en termes de propietats de conjunts de vectors a $\mathbb{F}_2^n$. Això, entre moltes altres raons, fa que l'espai $\mathbb{F}_2^n$ sigui un objecte central d'estudi. En particular, si es pren una base canònica $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ a $\mathbb{F}_2^n$, on e_i és el vector que té un 1 a la i-èsima coordenada i zero a les altres, el graf que té per vèrtexs els vectors de $\mathbb{F}_2^n$ i per arestes els parells x, y que difereixen només en una coordenada, és l'anomenat *n-cub* (o hipercub de dimensió n). En altres paraules, el n-cub és el graf de Cayley del grup additiu de $\mathbb{F}_2^n$ respecte de la base canònica E, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2^n, E)$.

En el cas del n-cub, la distància associada al graf de Cayley $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_2^n, E)$ s'anomena *distància de Hamming*: per a $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$d(x, y) = |\{i \in \{1, \dots, n\}:\ x_i \neq y_i\}.$$

D'aquesta manera s'obté un anàleg discret natural de l'espai euclidià, que és l'espai ambient on es formulen una gran quantitat de problemes de la matemàtica discreta. En la figura 8 hi ha dibuixats els cubs de dimensions $n = 1, 2, 3$ de manera que es ressalta la seva interpretació com a reticle booleà, el diagrama de Hasse de l'ordre parcial a la família de subconjunts d'un conjunt finit donat per la inclusió.

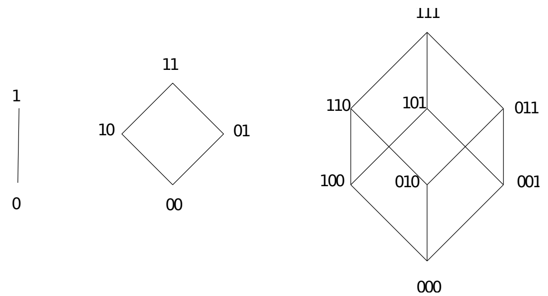

FIGURA 8: Els reticles booleans de dimensions $n = 1, 2, 3$.

Seguint la notació anterior, denotem la vora d'un conjunt $A \subset \mathbb{F}_2^n$ per

$$\partial A = (A + E) \setminus A,$$

on $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ (aquí ometem el subíndex a ∂_E). Com que E és també la bola de radi 1 centrada a l'origen del n-cub, queda clara l'analogia discreta amb la definició de Minkowski d'àrea d'un cos convex a $\mathbb{R}^n$, llevat que en el context discret l'operador vora s'aplica a tots els subconjunts de $\mathbb{F}_2^n$.

La pregunta isoperimètrica és ara: quina és la vora més petita d'un conjunt de mida donada a $\mathbb{F}_2^n$? Aquesta pregunta es va formular originalment en el context de la teoria extremal de conjunts. Escrivim com $\binom{[n]}{k}$ la família dels $\binom{n}{k}$ subconjunts de mida k a $[n]$. Donada una família $A \subset \binom{[n]}{k}$, la seva ombra superior ∇A és la família de conjunts a $\binom{[n]}{k+1}$ que contenen algun subconjunt de A. Quin és el nombre mínim de subconjunts a ∇A per a una família A de cardinal donat?

La resposta a aquesta pregunta és el teorema de Kruskal-Katona [39, 35], que dóna una solució eficient i constructiva: hi ha una ordenació dels conjunts a $\binom{[n]}{k}$ de manera que els t primers conjunts d'aquest ordre minimitzen la mida de l'ombra superior entre totes les famílies de mida t. És a dir, si I_t és el segment inicial de llargada t en aquest ordre,

$$|\nabla I_t| \leq |\nabla A| \text{ per a tot } A \subset \binom{[n]}{k} \text{ amb } |A| = t.$$

L'ordenació en qüestió és una variació de l'ordre lexicogràfic habitual que s'anomena *ordre colex invers*, i que denotarem per $\preceq$. En aquesta ordenació, dos conjunts diferents $X, Y \in \binom{[n]}{k}$ satisfan $X \preceq Y$ si i només si

$$\max(X\Delta Y) \in X,$$

on Δ denota la diferència simètrica de conjunts (en l'ordre lexicogràfic habitual, X és menor que Y si i només si $\min(X\Delta Y) \in X$). Per exemple, els conjunts de $\binom{[5]}{3}$ en l'ordre colex invers són

$$345 \preceq 245 \preceq 145 \preceq 235 \preceq 135 \preceq 125 \preceq 234 \preceq 134 \preceq 124 \preceq 123.$$

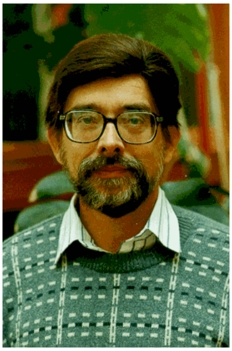

FIGURA 9: Gyula Katona (1941) va néixer a Budapest. Va ser director de l'Institut de Matemàtiques Alfred Rényi de Budapest (1996–2006), i és president de la Societat Matemàtica Hongaresa János Bolyai des de 2006. Va provar el teorema que porta el seu nom el 1968, i va descobrir que el resultat havia estat provat pocs anys abans per Kruskal. Amant de la filologia, coneix els rudiments de més d'una trentena de llengües, entre les quals el català. A la celebració del seu setantè aniversari, el setembre de 2011, els seus companys hongaresos el van obsequiar amb la lectura de la traducció catalana d'un dels diàlegs de Rényi, que van aparèixer en aquest *Butlletí* [51].

La identificació de les famílies òptimes per al problema extremal de minimització de l'ombra superior d'una família de k-subconjunts proporciona també el valor exacte d'aquest mínim. Per a això es fa servir l'anomenada *representació k-binomial* d'un nombre natural. Fixat k, cada natural t es pot escriure de manera única com

$$t = \binom{t_k}{k} + \binom{t_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{t_j}{j}, \quad t_k \geq t_{k-1} \geq \cdots \geq t_j \geq j \geq 1.$$

Aleshores, per a cada família $A \subset \binom{[n]}{k}$ de mida t, se satisfà

$$|\nabla A| \geq \binom{t_k}{k+1} + \binom{t_{k-1}}{k} + \cdots + \binom{t_j}{j+1},$$

i hi ha igualtat si A és la família dels primers t conjunts de $\binom{[n]}{k}$ en l'ordre colex invers.

Poc després de l'aparició del teorema de Kruskal-Katona, Harper [31] va obtenir la solució completa del problema isoperimètric al n-cub. Per això va estendre l'ordre colex invers a tot el n-cub, extensió que denotarem amb $\leq_n$, definint, per a $x, y \in \mathbb{F}_2^n$,

$$x \leq_n y \Leftrightarrow \begin{cases} |x| < |y|, & \text{o} \\ |x| = |y| \text{ i } x \preceq y, \end{cases}$$

Aquí $|x|$ denota la distància de x a l'origen, és a dir, el nombre d'uns a x. Si $|x| = |y|$, aleshores x i y són vectors característics de conjunts de $\binom{[n]}{k}$, $k = |x|$, i es poden comparar en l'ordre colex invers. L'ordre $\leq_n$ s'anomena ordre *lex-simplicial*.

Teorema 7 (Harper). *Per a cada natural $t \leq 2^n$ denotem per I_t el segment inicial dels t primers vectors en l'ordre lex-simplicial de $\mathbb{F}_2^n$. Per a qualsevol conjunt $A \subset \mathbb{F}_2^n$ de mida t se satisfà*

$$|\partial A| \geq |\partial I_t|.$$

A més, si $t = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{n}{0}$, hi ha igualtat si i només si $A = I_t$.

Una característica fonamental de l'ordre lex-simplicial a $\mathbb{F}_2^n$ és que, per a qualsevol segment inicial I_t, el conjunt $I_t \cup \partial I_t$ és també un segment inicial de l'ordre. En particular, les boles

$$B_r(0) = \{y \in \mathbb{F}_2^n \colon\ d(0, y) \leq r\} = B_{r-1}(0) \cup \partial(B_{r-1}(0)),$$

són segments inicials i tenen la vora més petita entre tots els conjunts del mateix cardinal. La darrera part del teorema de Harper estableix, a més, que les boles $B_r(0)$ (que tenen justament mida $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{n}{0}$) són els únics conjunts amb vora mínima entre els conjunts de la seva mateixa mida. Obtenim, doncs, un enunciat anàleg a la desigualtat isoperimètrica en espais euclidians:

Per a cada conjunt $A \subset \mathbb{F}_2^n$ de mida $t = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$ se satisfà

$$|\partial A| \geq \binom{n}{k+1}.$$

A més, val la igualtat si i només si A és una bola de radi k en la distància de Hamming.

La caracterització completa del cas d'igualtat en el teorema de Harper per a conjunts de cardinal diferent al d'una bola és un problema més complex, i en general es perd la unicitat. Fins i tot hi ha casos relativament sorprenents en els quals hi ha conjunts amb la mateixa mida de vora que un conjunt inicial i que són unió de dues boles disjuntes; vegeu Bezrukov [2].

El mètode de demostració de Harper s'inspirava en el procés de simetrització que Steiner havia usat per resoldre el problema isoperimètric clàssic. Hi ha diverses demostracions de la desigualtat isoperimètrica al n-cub, com la de Frankl i Füredi [17], Katona [36] o Bezrukov i l'autor [3].

Aquesta darrera demostració té l'avantatge que expressa una propietat general dels grafs que es poden escriure com a producte cartesià, i estén així la desigualtat isoperimètrica a una gran diversitat de casos. Per enunciar el teorema en el qual es basa, oblidem per un moment el context algebraic i considerem un graf abstracte $\Gamma = (V, E)$, és a dir, un conjunt V de vèrtexs i un conjunt E d'arestes (parells no ordenats de vèrtexs). El producte cartesià $\Gamma \times \Gamma'$ de dos grafs $\Gamma = (V, E)$ i $\Gamma' = (V', E')$ té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià $V \times V'$, i el conjunt d'arestes els parells $\{(x, x'), (y, y')\}$ pels quals una de les coordenades és fixa, $x = y$ o $x' = y'$, i l'altra és adjacent en el graf corresponent, $\{x', y'\} \in E'$ o $\{x, y\} \in E$ respectivament. Per exemple, si K_2 denota el graf amb dos vèrtexs i una aresta, el cub de dimensió 1 a la figura 8, aleshores el cub de dimensió 2 és $K_2 \times K_2$ i el cub de dimensió n és $K_2^n = \underbrace{K_2 \times \cdots \times K_2}_{n}$.

La definició d'ordre lex-simplicial que s'ha donat a $\mathbb{F}_2^n$ es pot estendre a les potències $\Gamma^n = \underbrace{\Gamma \times \cdots \times \Gamma}_{n}$ d'un graf qualsevol de la manera següent. Considerem una ordenació $\preceq$ dels vèrtexs de Γ i diem $0 \in V$ el mínim d'aquest ordre. L'ordre simplicial de Γ induït per $\preceq$ és

$$x \le_1 y \Leftrightarrow \begin{cases} d(0,x) < d(0,y), \quad \text{o} \\ d(0,x) = d(0,y) \text{ i } x \preceq y. \end{cases}$$

Aquesta definició es pot estendre a Γ^n com

$$x \le_n y \Leftrightarrow \begin{cases} d(0,x) < d(0,y), \quad \text{o} \\ d(0,x) = d(0,y) \text{ i } x \preceq_n y, \end{cases}$$

on ara $x, y \in V^n$, les distàncies es prenen a Γ^n i l'ordre $\preceq_n$ a les esferes centrades a $0 = (0, \ldots, 0)$ de Γ^n es defineix com un ordre colex invers: si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i $y = (y_1, \ldots, y_n)$, aleshores

$$x \preceq_n y \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \quad \text{o} \\ y_j \preceq x_j, \ j = \max\{i \colon x_i \neq y_i\}. \end{cases}$$

En general, diem que una ordenació $\le$ dels vèrtexs d'un graf Γ és isoperimètrica si satisfà les dues condicions de l'ordre lex-simplicial al n-cub:

1. Per a cada $A \subset V$ de mida t, $|\partial A| \ge |\partial I_t|$, on I_t és el segment inicial de mida t en l'ordre $\le$.
2. Per a cada segment inicial I_t, el conjunt $I_t \cup \partial I_t$ és també un segment inicial.

Amb aquesta notació es pot enunciar el resultat principal de [3].

TEOREMA 8 (PRINCIPI LOCAL-GLOBAL). *Sigui $\preceq$ una ordenació dels vèrtexs d'un graf $\Gamma = (V, E)$ i sigui 0 un vèrtex de V. L'ordre lex-simplicial $\leq_n$ induït per $\preceq$ i 0 és isoperimètric a Γ^n, $n \geq 1$, si i només si ho és a Γ i Γ^2.*

Amb aquest resultat general es pot obtenir fàcilment la desigualtat isoperimètrica al n-cub, simplement observant que l'ordenació $0 \preceq 1$ és òbviament isoperimètrica a K_2 i que l'ordre lex-simplicial induït al graf de quatre vèrtexs $K_2 \times K_2$ també és isoperimètric.

Observem que, per la propietat 2, si l'ordre lex-simplicial a Γ^n és isoperimètric, aleshores les boles són conjunts que minimitzen la mida de la vora. Una aplicació del teorema prova que aquest és el cas per al tor n-dimensional $T_{2m} = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{2m}^n, E)$ (on E denota com sempre un conjunt canònic de generadors), de manera que una altra vegada, les boles són els conjunts de vora més petita a T_{2m}, un resultat inicialment provat per Bollobás i Leader [7], Karachanjan [34] i Riordan [52].

En canvi, no és difícil comprovar que en els espais vectorials $\mathbb{F}_q^n$, (sempre respecte d'un conjunt canònic de generadors) el teorema dóna una resposta negativa si q és una potència d'un primer senar. Tot i que a $\mathbb{F}_q$ l'ordenació natural dóna un ordre isoperimètric (justament la que fan servir Eliahou, Kervaire i Plagne a la prova del teorema 6), es pot veure que a $\mathbb{F}_q^2$ no hi cap ordre isoperimètric. L'exemple més senzill és a $\mathbb{F}_3^2$ i està dibuixat en la figura 10. De fet, es pot comprovar que no sempre les boles són els conjunts que minimitzen la vora. Aquest fet il·lustra l'abast de les analogies entre versions discretes i contínues d'un mateix fenomen i com, en general, les versions discretes solen amagar més sorpreses.

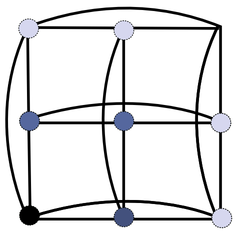

FIGURA 10: A $\mathbb{F}_3^2$ el conjunt extremal de mida 4 no és un subconjunt de la bola de radi 1 (de mida 5): tots els subconjunts de mida 4 de la bola de radi 1 tenen vora més gran. En la figura, els punts del conjunt extremal de mida 4 estan en color fosc, i els de la seva vora, en color clar.

7 La desigualtat de Brunn-Minkowski en el reticle d'enters

Com s'ha comentat abans, una manera de discretitzar la desigualtat de Brunn-Minkowski és conservar l'espai ambient $\mathbb{R}^n$ però considerar només conjunts finits. Un argument d'Imre Ruzsa [54] prova aleshores que l'obtenció d'una fita inferior del cardinal de la suma de dos conjunts finits $A + B$ es pot reduir a considerar subconjunts del reticle enter $\mathbb{Z}^n$. Ens ocupem, doncs, de trobar fites inferiors per al cardinal de la suma $A + B$ de dos conjunts finits a $\mathbb{Z}^n$ en termes dels cardinals dels sumands A i B. Per evitar casos trivials suposarem sempre que $\min\{|A|, |B|\} \geq 2$.

El cas unidimensional és ben elemental: donats dos conjunts d'enters $A, B \subset \mathbb{Z}$, sempre tenim

$$|A + B| \geq |A| + |B| - 1,$$

i val la igualtat si i només si A i B són progressions aritmètiques de la mateixa diferència. Per obtenir, doncs, una desigualtat significativa en dimensió n, cal demanar (com en la desigualtat de Brunn-Minkowski) que A i B siguin conjunts n-dimensionals, és a dir, que no estiguin continguts en cap hiperplà (traslladat d'un subgrup isomorf a $\mathbb{Z}^{n-1}$). El primer resultat en aquesta direcció és la desigualtat següent de Gregory Freiman [18]:

$$|A + A| \geq (n + 1)|A| - \binom{n+1}{2}. \tag{19}$$

Observem que a la desigualtat de Brunn-Minkowski amb $A = B$ obtenim

$$\mu(A + A) = \mu(2A) \geq 2^n \mu(A),$$

(que, de fet, es desprèn de l'homogeneïtat de la mesura: en el cas continu, $2A = A + A = 2 \cdot A$). En els dos casos s'obté una fita lineal en la mesura de A, però la fita de (19) és molt més petita. El motiu és que un conjunt de $\mathbb{Z}^n$ pot ser n-dimensional i mantenir una bona part de la seva mesura en dimensió 1 (en el cas continu una part d'un conjunt que no sigui n-dimensional no contribueix a la seva mesura). Un altre motiu més contundent és que la desigualtat (19) és justa: prenent A el conjunt

$$L_{n,m} = \{0, e_1, 2e_1, \ldots, (m - n)e_1, e_2, \ldots, e_n\},$$

format per una llarga progressió aritmètica sobre una dimensió i un símplex, es dóna la igualtat a (19), fet que s'il·lustra en la figura 11.

Una manera de fer reaparèixer la constant 2^n és la versió següent de la desigualtat de Ben Green i Terry Tao a [26].

Teorema 9 (Green i Tao). *Sigui A un conjunt contingut en el cub $[1, L_1] \times \cdots \times [1, L_n]$. Aleshores*

$$|A + A| \geq 2^n |A| + \sum_{i=1}^{n} (2L_i - 1) - 2 \sum_{i=1}^{n} L_i.$$

En particular, si $L = L_1 = \cdots = L_n$, tenim $|2 \cdot A| \geq 2^n |A| - n(2L)^{n-1}$ de manera que, per a un subconjunt de mida $|A| = cL^n$, $c > 0$, contingut en un cub $[1, L]^n$, tenim $|A + A|$ aproximadament igual a $2^n |A|$.

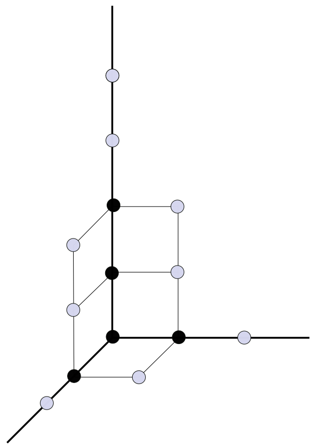

FIGURA 11: Cas extremal de la desigualtat (19) a $\mathbb{Z}^3$. Els punts negres són de $A = L_{3,5}$, i els grisos de $2A \setminus A$.

Ruzsa [54] va obtenir una extensió de la desigualtat (19) a dos conjunts diferents, que va ser formulada després d'una manera més il·lustrativa per Gardner i Gronchi [25] . El resultat de Gardner i Gronchi està en l'esperit de les ordenacions isoperimètriques i la idea inicial de Brunn sobre la compressió. Qualitativament, el resultat que van obtenir diu que el cardinal $|A + B|$ de la suma de dos conjunts al reticle enter $\mathbb{Z}^n$ es minimitza quan A és un conjunt $L_{n,m}$ i B aproxima el més possible un símplex. Més precisament, fixat un cardinal $b = |B|$, defineixen una ordenació semblant a la lex-simplicial que s'ha discutit a la secció 6, però ara amb

$$|x|_b = \frac{x_1}{b-n} + x_2 + \cdots + x_n,$$

de manera que

$$x \leq_b y \Leftrightarrow \begin{cases} |x|_b < |y|_b & \text{o} \\ |x|_b = |y|_b \text{ i } x \preceq y, \end{cases}$$

on $\preceq$ és l'ordre colex invers, és a dir, $x \preceq y$ si $x_j > y_j$ i $x_{j+s} = y_{j+s}$, $s = 1, \ldots, n-j$ per a algun j. Diem I_k el conjunt dels k vectors més petits amb coordenades no negatives en aquest ordre. Per a $k = b$ s'obté el conjunt $L_{n,b}$.

TEOREMA 10 (GARDNER I GRONCHI). *Siguin $A, B \subset \mathbb{Z}^n$ amb cardinals $a = |A|$, $b = |B|$ i $\dim(B) = n$. Aleshores,*

$$|A + B| \geq |I_a + I_b|.$$

Les idees de compressió i ordenació que estan darrere de la prova d'aquest resultat es poden trobar ja a Freiman [18] i Bollobás i Leader [8]. Gardner i

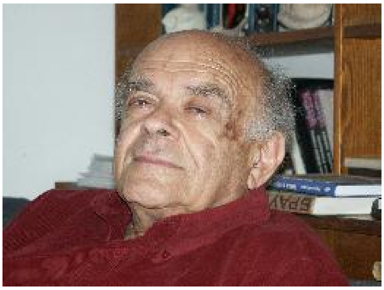

FIGURA 12: Grygory Freiman, nascut a la Unió Soviètica i emigrat a Israel, on viu actualment, va iniciar un estudi sistemàtic de problemes inversos en teoria additiva que va pubicar en una llarga sèrie d'articles amb aquest nom. El que es coneix com a *teorema de Freiman* diu que un conjunt que sumat amb si mateix no dóna més que un creixement lineal de la seva mida, té una estructura pròxima a la suma d'un nombre afitat de progressions aritmètiques. Aquest resultat li ha merescut un reconeixement universal.

Gronchi donen també una fórmula explícita per a $|I_a + I_b|$. En particular en dedueixen una versió discreta de la desigualtat de Brunn-Minkowski que és justa si només es té en compte el cardinal i la dimensió:

TEOREMA 11 (GARDNER I GRONCHI). *Siguin $A, B \subset \mathbb{Z}^n$ amb cardinals $a = |A|$, $b = |B|$ i $\dim(B) = n$. Aleshores,*

$$|A + B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + \left(\frac{|B| - n}{n!}\right)^{1/n}.$$

Observem que prenent B el símplex n-dimensional, $B = \{0, e_1, \ldots, e_n\}$, tenim

$$|\partial A| = |A + B| - |A|,$$

on ∂A és la definició estàndard de vora d'un conjunt A al reticle dels enters (és a dir, la vora al graf de Cayley $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}^n, B)$). En aquest cas, $b = n + 1$ i $|v|_b$ coincideix amb la norma usual $|v| = v_1 + \cdots + v_n$ (per a vectors de coordenades positives). Segons el teorema 10 obtenim una versió a $\mathbb{Z}^n$ del resultat de Harper sobre la minimalitat de la vora de segments inicials de l'ordre lex-simplicial. En particular, les boles minimitzen la mida de la vora entre els conjunts del mateix cardinal. Ambdós resultats eren coneguts per a $\mathbb{Z}^n$ (Wang i Wang [66]), es poden deduir del resultat anàleg per al tor que s'ha vist a la secció anterior i, en una versió particular, havien estat utilitzats per Macaulay [44] el 1927, en les seves investigacions sobre ideals en anells.

8 La desigualtat de Bonnesen

La desigualtat de Gardner i Gronchi del teorema 10 és, potser, la versió discreta més propera a la desigualtat de Brunn-Minkowski. La naturalesa dels conjunts extremals, però, s'assembla molt més a la de conjunts unidimensionals que no pas n-dimensionals. Aquesta particularitat ja era present en la versió simètrica del resultat del teorema 19 de Freiman, i ha dut a explorar altres versions de la desigualtat més sensibles a l'estructura dels conjunts.

Un primer resultat en aquesta direcció és degut a Freiman. Recordem que la desigualtat de Brunn-Minkowski per a $A = B \subset \mathbb{R}^n$ dóna $\mu(A+A) \geq 2^n \mu(A)$. Un teorema de Freiman [18] diu que, si $|A + A| \leq c|A|$ amb $A \subset \mathbb{Z}^n$ finit i $c \leq 2^n$, aleshores A està contingut en un reduït nombre d'hiperplans.

Recentment, Freiman, Grynkiewicz, Stanchescu i l'autor [21, 22, 23] han estat explorant versions asimètriques (per a dos conjunts diferents) del resultat anterior, acompanyades de desigualtats del tipus Brunn-Minkowski que estan inspirades en les anomenades *desigualtats de Bonnesen* [5] (vegeu també el recull de Robert Osserman [50]). La motivació per a aquestes desigualtats era obtenir refinaments de la desigualtat isoperimètrica clàssica. Per exemple, per a una corba rectificable de Jordan al pla amb llargada L que tanca una àrea A i radi interior ρ (el radi màxim d'un cercle contingut a la regió tancada per la corba), es té

$$L^2 - 4\pi A \geq (L - 2\pi\rho)^2. \tag{20}$$

Si la corba és una circumferència, s'obté la igualtat en la desigualtat isoperimètrica clàssica al pla, que diu només que $L^2 - 4\pi A \geq 0$. Bonnesen va obtenir la desigualtat (20) per a corbes convexes, i la seva extensió a corbes generals no va poder ser abordada fins a l'ús de mètodes de la geometria integral per Santaló (vegeu per exemple Blashke [4] o Santaló [57]).

En dimensió arbitrària, Bonnesen va provar un refinament de la desigualtat de Brunn-Minkowski en el qual es pot fer intervenir la mesura de la projecció sobre un hiperplà donat.

Teorema 12 (Bonnesen). *Siguin A, B dos compactes a $\mathbb{R}^n$. Sigui H un hiperplà i denotem per $a = \mu_{n-1}(\pi(A))$ i $b = \mu_{n-1}(\pi(B))$, on $\pi\colon \mathbb{R}^n \to H$ denota la projecció sobre un hiperplà H, i $A_H = \pi(A)$. Aleshores,*

$$\mu(A+B) \geq \left(a^{\frac{1}{n-1}} + b^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-1} \left(\frac{\mu(A)}{a} + \frac{\mu(B)}{b}\right). \tag{21}$$

A més de ser sempre una desigualtat millor que la de Brunn-Minkowski, llevat és clar dels casos d'igualtat, la desigualtat de Bonnesen té un significat geomètric natural. La grandària de $A + B$ es relaciona amb la de les projeccions en un hiperplà i del valor mitjà de la mesura n-dimensional sobre aquestes projeccions. La desigualtat és, doncs, sensible a la desviació dels compactes respecte de les boles. A [22] es dóna una prova directa de (12) que permet identificar els casos d'igualtat. El cas discret, però, resulta més complex i els casos extremals tenen una estructura més diversa. Per al cas de dimensió dos la desigualtat s'enuncia de manera completament paral·lela a (21), i els casos d'igualtat estan completament descrits a [21].

Teorema 13. *Siguin A, B dos conjunts finits 2-dimensionals a $\mathbb{Z}^2$. Siguin m i n el nombre de rectes paral·leles a una recta donada ℓ que tallen A i B respectivament. Aleshores*

$$|A+B| \geq (m+n-1)\left(\frac{|A|}{m}+\frac{|B|}{n}-1\right).$$

La desigualtat (21) s'estén al cas discret en dimensió arbitrària per inducció sobre n a partir del teorema anterior, però el seu enunciat precís s'acompanya de condicions tècniques relacionades amb l'estructura dels conjunts extremals que fan menys transparent el seu enunciat [23], però donen un refinament de la versió discreta de la desigualtat de Brunn-Minkowski obtinguda per Gardner i Gronchi (teorema 10) i de la de Green i Tao (teorema 9).

Podríem dir que les desigualtats de tipus Bonnesen són sensibles a la distància entre dos conjunts en relació amb la propietat de ser homotètics. No ho són en canvi al grau de no convexitat d'aquests conjunts. En aquesta direcció acabem mencionant un dels resultats qualitatius de més abast entre les generalitzacions de la desigualtat de Brunn-Minkowski que dóna Ruzsa [55] i que expressa de la manera següent. Per a un conjunt finit n-dimensional $B \subset \mathbb{Z}^n$, Ruzsa defineix la funció d'impacte de B com

$$\xi_B(m) = \min\{|A+B| \colon A \subset \mathbb{Z}^n, |A| = m\}$$

de manera que

$$|A+B| \geq \xi_B(|A|).$$

Sigui $\mathrm{conv}(B)$ el convex més petit que conté B (el conjunt de punts dins l'envolupant convexa de B.) Ruzsa prova que

$$\lim_{m\to\infty}(\xi_B(m)^{1/n} - m^{1/n}) = |\mathrm{conv}(B)|^{1/n}.$$

Encara que només en forma asimptòtica, la igualtat expressa el fet que, per a conjunts A prou grans, tenim essencialment

$$|A+B|^{1/n} \geq |A|^{1/n} + |\mathrm{conv}(B)|^{1/n},$$

un refinament significatiu de la desigualtat de Brunn-Minkowski en el qual hi ha una referència quantitativa explícita a la convexitat dels conjunts involucrats.

9 Algunes aplicacions

Desigualtats com la de Brunn-Minkowski, pel seu caràcter bàsic, apareixen de manera natural en una gran diversitat de problemes, i pot resultar una mica gratuït descriure'n les aplicacions. Seria, però, deixar escapçada aquesta exposició si no es descriuen, ni que sigui de manera sintètica i incompleta, alguns dels desenvolupaments matemàtics que tenen la seva arrel en aquesta desigualtat i algunes de les aplicacions en les quals hi té un paper clau. Tant els uns com les altres són el que dóna relleu i profunditat a un resultat matemàtic.

Com és natural, la connexió més directa de la desigualtat de Brunn-Minkowski és a la mateixa geometria convexa, amb l'anàlisi de l'existència i el càlcul de nocions ben definides d'àrea per a objectes convexos, des de polítops fins a objectes definits per funcions poc regulars. Aquí una de les referències obligades és el text ja esmentat de Schneider [58], *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*, que dóna una perspectiva molt completa i actualitzada d'aquest camp.

Una de les contribucions matemàtiques més reconegudes de Minkowski és la introducció de l'anomenada *geometria dels nombres*, l'estudi de propietats dels enters des de la perspectiva geomètrica. La seva *Geometrie der Zahlen* [47], un clàssic de la història de les matemàtiques, conté els seus famosos teoremes sobre l'existència de punts d'un reticle en cossos convexos amb simetria central que tenen un volum comparable al de la cel·la fonamental del reticle. Un text clàssic que explica els desenvolupaments relacionats amb aquests resultats i les seves aplicacions a problemes d'aproximació diofàntica, estudi de formes quadràtiques, funcions de representació o empaquetaments és Cassels [11]. Un dels problemes abordats per Cassels és el que fa referència a bases additives dels enters, que inclou el problema de Waring (cada enter es pot escriure com la suma de potències k-èsimes en un nombre que només depèn de k) o la conjectura de Goldbach (cada nombre parell és suma de dos nombres primers). L'interès per aquests problemes additius de la teoria de nombres va veure un ressorgiment arran de la publicació, el 1996, de les monografies de Nathanson [49] sobre la teoria additiva de nombres. En particular, va contribuir a la popularització del teorema de Freiman sobre l'estructura de conjunts d'enters amb suma de Minkowski petita, en la prova del qual, donada per Ruzsa [53], hi intervenen de manera decisiva els teoremes de Minkowski abans esmentats. Freiman [20] dóna una panoràmica de les motivacions i els resultats principals de la teoria al voltant del seu celebrat teorema, i en descriu múltiples aplicacions a la teoria de nombres, la probabilitat, la teoria de la informació, la teoria de codis o a problemes de programació entera. A [59] es fa un recull complementari d'aquestes aplicacions a altres problemes de la teoria de nombres i la combinatòria. Tao i Vu [64] donen una visió més actualitzada dels darrers desenvolupaments en aquesta àrea, que bategen amb el nom de *combinatòria additiva*, en la qual l'estimació de la mida de la suma de Minkowski ocupa un lloc central.

Entre les àrees en què la teoria de Brunn-Minkowski troba una aplicació natural hi ha la cristal·lografia i la teoria de superfícies mínimes. La minimització de l'energia derivada de la tensió superficial, per exemple en les bombolles de sabó, fa que els cristalls en contacte amb el mateix element en estat líquid, o el líquid en contacte amb el seu vapor, prenguin formes en què un volum determinat minimitza la superfície que el tanca. Per a les diferents funcions que determinen la tensió superficial, aquestes formes s'anomenen *de Wulf*. Per exemple, en les bombolles de sabó, la tensió superficial és constant i tendeixen a la forma esfèrica, d'acord amb la desigualtat de Brunn-Minkowski. El tractament genèric d'aquest problema condueix a l'anomenat *problema de Minkowski*, que tracta de l'existència, regularitat i estabilitat de superfícies convexes que tenen curvatura donada com a funció de les seves normals exteriors, i hi ha una extensa literatura sobre aquest tema; vegeu per exemple Gardner [24, secció 6] i les seves referències.

La desigualtat de Prékopa-Leindler que s'ha comentat en el text és només el primer estadi d'una vasta àrea de l'anàlisi funcional que condueix a una constellació de desigualtats en què la noció de funcions convexes o log-convexes té un paper bàsic. Aquest món de desigualtats s'estimula en una relació recíproca amb la teoria de difusió de gasos, que planteja nous problemes i aporta noves solucions. El resum de Gardner [24, seccions 8, 9 i 10] proporciona una altra vegada una visió panoràmica d'aquests desenvolupaments amb una detallada relació bibliogràfica.

Tal com hem comentat, les desigualtats isoperimètriques es poden considerar particularitzacions de les desigualtats de Brunn-Minkowski. Hi ha múltiples versions de desigualtats isoperimètriques a més de les que hem vist a l'espai euclidià, al reticle dels enters o al n-cub. Una de les aplicacions d'aquestes desigualtats és als fenòmens de concentració de mesura, que descriuen la concentració de probabilitat de sumes de variables aleatòries al voltant del seu valor mitjà. El fenomen de concentració de mesura es pot entendre des del punt de vista geomètric. Un dels exemples paradigmàtics és el de l'esfera S^{n-1} amb la distància euclidiana heretada de $\mathbb{R}^n$. El resultat essencial en relació amb el fenomen de concentració de mesura diu que, per a qualsevol subconjunt $A \subset S^{n-1}$ de mesura $1/2$, el conjunt A_ϵ de punts a distància com a molt ϵ de A té mesura $1 - e^{-n\epsilon^2/2}$, és a dir, concentra tota la mesura de l'esfera. Aquest fet aparentment paradoxal es prova resolent el problema isoperimètric, que en l'esfera té com a conjunts extremals els casquets esfèrics. Un altre exemple particularment important en probabilitat és el cas de $\mathbb{R}^n$ amb la mesura gaussiana (mesura de probabilitat amb densitat $\gamma(x) = (2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$). Una altra vegada, qualsevol conjunt A amb mesura $1/2$ té gairebé tot l'espai a distància petita, en el sentit que A_ϵ té mesura $1 - 2e^{-\epsilon^2/4}$. La demostració més simple d'aquest fet, deguda a Maurey [46] i Talagrand [63], fa una simple aplicació de la desigualtat de Prékopa-Leindler. Podeu veure una descripció dels fenòmens de concentració de mesura i de les seves múltiples aplicacions a l'excel·lent article de Gabor Lugosi [42] en aquest BUTLLETÍ.

Una altra àrea natural d'aplicació de la teoria de Brunn-Minkowski és el problema del càlcul del volum d'un cos convex. No hi ha fórmules generals per obtenir o aproximar aquest volum, i aquest problema tan bàsic es tracta de forma algorísmica. L'obtenció d'un algorisme per al càlcul del volum d'un cos convex en dimensió arbitrària, però, ha resultat ser un problema dur des del punt de vista de la complexitat dels algorismes, fins i tot per obtenir solucions aproximades. Es pot trobar la fascinant història d'aquest problema a Lovász [41]. Aquest problema es va desencallar amb l'aplicació d'algorismes aleatoris, basats a fer marxes aleatòries, que donen aproximacions arbitràries amb alta probabilitat. L'eficiència d'aquests algorismes depèn de la rapidesa de la convergència a la distribució límit de la marxa aleatòria. Aquesta rapidesa s'avalua a partir de desigualtats isoperimètriques. Un dels millors resultats en termes d'anàlisi i eficiència per a un algorisme del càlcul d'un cos convex és de Kannan, Lovász i Simonovits [33], en què l'ús de desigualtats isoperimètriques i l'ús de distribucions convexes constitueixen un desenvolupament particular de la teoria de Brunn-Minkowski.

Aquest és només un exemple, central, això sí, de l'aplicació de la teoria de Brunn-Minkowski al disseny i a l'anàlisi d'algorismes. Un text excel·lent en què es descriu el context general de l'aplicació de la teoria de Brunn-Minkowski a algorismes geomètrics i, en particular, a problemes d'optimització combinatòria és el de Grötschel, Lovász i Schrijver [27] *Geometric algorithms and combinatorial optimization*.

Les versions discretes de les desigualtats isoperimètriques tenen una altra aplicació en l'estudi d'ordenacions lineals de conjunts parcialment ordenats. Una àrea d'aplicació són els anomenats *problemes de Layout* en els quals es busquen ordenacions que optimitzen diverses funcions en grafs. L'exemple paradigmàtic és el problema de l'amplada de banda, originat en el disseny d'algorismes per a càlculs matricials. Sovint aquests càlculs es fan en matrius poc denses i l'objectiu és trobar una ordenació de les files i columnes per tal d'agrupar el suport de la matriu al màxim possible en una banda estreta de la diagonal principal (d'aquí el nom d'*amplada de banda*). Hi ha una gran diversitat de problemes anàlegs que sorgeixen en camps diversos de la combinatòria, l'algorísmia i la informàtica teòrica. La monografia de Harper [32], *Global methods for combinatorial isoperimetric problems*, dóna una visió panoràmica d'aquesta mena de problemes, i a Díaz, Petit i Serna [14] se'n fa un recull exhaustiu i es tracta la seva complexitat algorísmica.

Acabem aquest breu recull d'aplicacions mencionant-ne algunes a la combinatòria. Moltes de les seqüències de nombres que apareixen com a solució de problemes d'enumeració tenen la propietat de ser log-convexes (els coeficients binomials, els nombres de Stirling, els coeficients gaussians) i aquesta és una propietat que sovint es conjectura sempre que sembla plausible. La solució d'algunes d'aquestes conjectures passa sovint per la utilització de desigualtats procedents de la teoria de Brunn-Minkowski; vegeu, per exemple, Stanley [61]. Un dels problemes clàssics resolt amb aquestes eines és la solució d'Egorychev [15] de l'anomenada *conjectura de Van der Waerden* sobre la permanent d'una matriu doblement estocàstica. Recordem que la permanent d'una matriu quadrada és el nombre que s'obté en el desenvolupament del determinant si ometem els signes (en resulta, doncs, una forma multilineal que no és alternada). Així com el determinant es considera una forma multilineal computacionalment tractable, no passa el mateix amb la permanent, que des del punt de vista algorísmic resulta un problema d'especial duresa. La permanent d'una matriu es pot fer servir per comptar una bona varietat d'estructures combinatòries (aparellaments en grafs bipartits, quadrats llatins, etc.)

de manera que qualsevol resultat sobre estimacions del seu valor és interessant. La conjectura de Van der Waerden (de la qual el suposat autor desconeixia l'existència) diu que, per a una matriu doblement estocàstica d'ordre n (la suma de cada columna i de cada fila és 1), la permanent es minimitza sobre la matriu amb tots els termes iguals a $1/n$. En fos qui en fos l'autor, la conjectura va ser atacada durant més de trenta anys fins que Egorychev en va obtenir una prova fent servir les desigualtats d'Aleksandrov-Fenchel, que són desigualtats sobre els volums mixtos de Minkowski semblants a les que s'han mencionat a la secció 2.

Agraïments

L'autor dóna les gràcies als col·legues amb qui ha compartit tantes discussions sobre els problemes que es descriuen en aquest article, molt especialment a Yahya O. Hamidoune.

Referències

[1] Ball, K. «An elementary introduction to modern convex geometry». A: Levy, S. (ed.). *Flavors of geometry*. Berkeley: Cambridge University Press, 1997, 1–58. (MSRI Publications; 31)

[2] Bezrukov, S. L. «Isoperimetric problems in discrete spaces». A: Frankl, P.; Füredi, Z.; Katona, G.; Miklos, D. (ed.). *Extremal problems for finite sets. Bolyai Soc. Math. Stud.*, 3. Budapest, 1994, 59–91.

[3] Bezrukov, S. L.; Serra, O. «A local-global principle for vertex isoperimetric problems». *Discrete Math.*, 257 (2) 2002), 285–309.

[4] Blaschke. W. «Beweise zu Satzen von Brunn und Minkowski uber die Minimaleigen- schaft des Kreiser». *Jahresber. Deutsche Math.-Ver.*, 23 (1914), 210–234.

[5] Bonnesen, T. *Les problèmess de isopérimètres et des isédiphanes*. París: Imprimerie Gauthier-Villars et C^{1e}, 1929.

[6] Bonnesen, T; Fenchel, W. *Theory of convex bodies*. Moscow, ID: B C S Associates, 1987. [Traduït de l'alemany per L. Boron; C. Christenson; B. Smith]

[7] Bollobás, B; Leader, I. «An isoperimetric inequality on the discrete torus». *SIAM J. Appl. Math.*, 3 (1990), 32–37.

[8] Bollobás, B; Leader, I. «Sums in the grid». *Discrete Math.*, 162 (1–3) (1996), 31–48.

[9] Brunn, H. *Ober Ovale und Eiflachen*. Munic: Dissertation, 1887.

[10] Brunn, H. «Referat iiber eine Arbeit: Exacte Grundlagen fur eine Theorie der Ovale». Bayer, S. B. (ed.). *Akad. Wiss.* (1894), 93–111.

[11] CASSELS, J. W. S. *An introduction to the geometry of numbers*. Berlín: Springer, 1971. (Classics Math.) [Reedició del text original de 1959]

[12] CAUCHY, A. «Recherches sur les nombres». *J. École Polytechnique*, 9 (1813), 99–113.

[13] DAVENPORT, H. «On the addition of residues classes». *J. Lond. Math. Soc.*, 10 (1935), 30–32.

[14] DÍAZ, J.; PETIT, J.; SERNA, M. J. «A survey of graph layout problems». *J. ACM Computing Surveys*, 34 (2002), 313–356.

[15] EGORYCHEV, G. P. «Proof of the Van der Waerden conjecture for permanents». *Sib. Math. J.*, 22 (1981), 854–859.

[16] ELIAHOU, S.; KERVAIRE, M.; PLAGNE, A. «Optimally small sumsets in finite abelian groups». *J. Number Theory*, 101 (2003), 338–348.

[17] FRANKL, P.; FÜREDI, Z. «A short proof of a theorem of Harper on Hamming spheres». *Discrete Math.*, 34 (1981), 311–313.

[18] FREIMAN, G. *Foundations of structural theory of set addition*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 1973. (Transl. Math. Monographs; 37)

[19] FREIMAN, G. «What is the structure of K if $K + K$ is small?» *Lecture Notes in Math.* [Nova York: Springer], 1240, (1987), 109–134.

[20] FREIMAN, G. A. «Structure theory of set addition». *Astérisque*, 258 (1999), XI, 1–33.

[21] FREIMAN, G. A.; GRYNKIEWICZ, D; SERRA, O.; STANCHESCU, Y. V. «Inverse additive problems for Minkowski sumsets I». *Preprint* 2009.

[22] FREIMAN, G. A.; GRYNKIEWICZ, D; SERRA, O.; STANCHESCU, Y. V. «Inverse additive problems for Minkowski sumsets II». *J. Geom. Anal.* 2010, DOI: 10.1007/s12220-011-9251-7.

[23] FREIMAN, G. A.; GRYNKIEWICZ, D; SERRA, O.; STANCHESCU, Y. V. «Inverse additive problems for Minkowski sumsets III». *Preprint* 2011.

[24] GARDNER, R. J. «The Brunn-Minkowski inequality». *Bull. Amer. Math. Soc.*, 39 (2002), 355–405.

[25] GARDNER, R. J.; GRONCHI, P. «A Brunn-Minkowski inequality for the integer lattice». *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 (10) (2001), 3.995–4.024.

[26] GREEN, B; TAO, T. «Compressions, convex geometry and the Freiman-Bilu theorem». *Q. J. Math.*, 57 (4) (2006), 495–504.

[27] GRÖTSCHEL, M.; LOVÁSZ, L; SCHRIJVER, A. *Geometric algorithms and combinatorial optimization*. Nova York: Springer-Verlag, 1988.

[28] GRYNKIEWICZ, D.; SERRA, O. «Properties of two dimensional sets with small sumset». *J. Comb. Theory Ser. A*, 117 (2010), 164–188.

[29] HADWIGER, H; OHMANN, D. «Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie». *Math. Zeit.*, 66 (1956), 1–8.

[30] Hamidoune, Y. O. «An isoperimetric method in additive theory». *J. Algebra*, 179 (1996), 622–630.

[31] Harper, L. H. «Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs». *J. Comb. Theory*, 1 (1966), 385–393.

[32] Harper, L. H. *Global methods for combinatorial isoperimetric problems*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

[33] Kannan, R.; Lovász, L.; Simonovits, M. «Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma». *Discrete Comput. Math.*, 13 (1995), 541–559.

[34] Karachanjan, V. M. «A discrete isoperimetric problem on multidimensional torus». *Doklady AN Arm. SSR*, lxxiv (2) (1982), 61–65.

[35] Katona, G. O. H. «A theorem of finite sets». A: Erdős, P.; Katona, G. O. H. (ed.). *Theory of Graphs*. Budapest: Akadémiai Kiadó i Academic Press, 1968.

[36] Katona, G. O. H. «The Hamming sphere has minimum boundary». *Studia Sci. Math. Hungar.*, 10 (1975), 131–140.

[37] Kneser, H.; Suss, W. «Die Volumina in linearen Scharen konvexer Korper». *Mat. Tidsskr. B*, (1932), 19–25.

[38] Kneser, M. «Ein Satz über abelschen Gruppen mit Anwendungen auf die Geomterie der Zahlen». *Math. Z.*, 61 (1955), 429–434.

[39] Kruskal, J. B. «The number of simplices in a complex». A: Bellman, R. (ed.). *Mathematical optimization techniques*. Berkeley, CA: University of California Press, 1963.

[40] Ledoux, M. *The concentration of measure phenomenon*. Providence, R. I.: Amer. Math. Soc., 2001.

[41] Lovász, L. «How to compute the volume?» A: *Jber. d. Dt. Math.-Verein, Jubilaumstagung 1990*. Stuttgart: B. G. Teubner, 1992, 138–151.

[42] Lugosi, G. «Desigualtats de concentració». *Butll. SCM*, 24 (2) (2009), 97–136.

[43] Lusternik, L. A. «Die Brunn-Minkowskische Ungleichung für beliebige messbare Mengen». *C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS*, 8 (1935), 55–58.

[44] Macaulay, F. S. «Some properties of enumeration in the theory of modular systems». *Proc. Lond. Math. Soc.*, 26 (1927), 531–555.

[45] Matoušek, J. *Lectures on discrete geometry*. Berlín: Springer, 2002. (Grad. Texts in Math., 212)

[46] Maurey, B. «Some deviation inequalities». *Geom. Funct. Anal.*, 1–2 (1991), 188–197.

[47] Minkowski, H. *Geometrie der Zahlen*. Leipzig: Teubner, 1910. (Bibliotheca Mathematica Teubneriana; 40)

[48] Minkowski, H. «Theorie der konvexen Korper, insbesondere Begrtindung ihres Oberflachenbe- griffs». *Gesammelte Abhandlungen*. Vol. 2. Leipzig: Teubner, 1911, 131–229

[49] Nathanson, M. *Additive number theory: Inverse problems and the geometry of sumsets*. Berlín: Springer 1996. (Grad. Texts in Math.; 165)

[50] Osserman, R. «Bonnesen–style isoperimetric inequalities». *Amer. Math. Monthly*, 86 (1979), 1–29.

[51] Rényi, A. «Un diàleg socràtic sobre les matemàtiques» *Butll. SCM*, 17 (2) (2002), 51–67.

[52] Riordan, O. «An ordering on the discrete even torus». *SIAM J. Discr. Math.*, 11 (1) (1998), 110–127.

[53] Ruzsa, I. Z. «Generalized arithmetic progressions and sumsets». *Acta Math. Hungar.*, 65 (1994), 379–390.

[54] Ruzsa, I. Z. «Sum of sets in several dimensions». *Combinatorica*, 14 (1994), 485–490.

[55] Ruzsa, I. Z. «The Brunn-Minkowski inequality and nonconvex sets». *Geom. Dedicata*, 67 (1997), 337–348.

[56] Ruzsa, I. Z. «Sumsets and structure». A: *Combinatorial Number Theory and Additive Group Theory*. Basel: Birkhauser, 2009. (Advanced Courses in Mathematics CRM Barcelona)

[57] Santaló, L. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004. (Cambridge Math. Lib.)

[58] Schneider, R. *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. (Encyclopedia Math. Appl., 44)

[59] Serra, O. «An isoperimetric method for the small sumset problem». *Surveys in Combinatorics 2005*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., 2005, 119–152.

[60] Stanchescu, Y. «On the structure of sets with small doubling property on the plane (I)». *Acta Arith.*, 83 (2) (1998), 127–141.

[61] Stanley, R. P. «Two combinatorial applications of the Aleksandrov-Fenchel inequalities». *J. Combin. Theory ser. A*, 31 (1981), 56–65.

[62] Steele, M. J. *The Cauchy-Schwarz Master Class: An introduction to the art of mathemcatical inequalities*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. Mathematical Association of America, 2004.

[63] Talagrand, M. «A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon». A: Lindenstrauss, J.; Milman, V. D. (ed.). *Geometric aspects of functional analysis*. Nova York: Springer, 1991, 94–124. (Lecture Notes in Math.; 1469)

[64] Tao, T; Vu, V. *Additive combinatorics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2006. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105)

[65] VOSPER, G. «The critical pairs of subsets of a group of prime order». *J. Lond. Math. Soc.*, 31 (1956), 200–205.

[66] WANG, D. L.; WANG, P. «Discrete isoperimetric problems». *SIAM J. Appl. Math.*, 32 (4) (1977), 860–870.

[67] WANG, D. L.; WANG, P. «Extremal configurations on a discrete torus and a generalization of the generalized Macaulay theorem». *SIAM J. Appl. Math.*, 33 (1) (1977), 55–59.

DEPARTAMENT DE MATEMÀTICA APLICADA IV
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
JORDI GIRONA, 1, 08034 BARCELONA
oserra@ma4.upc.edu